

Präsenzaufgaben für den 19.11.2007

P14. Volumenintegration

Rauminhalte von Gebieten G lassen sich als Volumenintegrale mit dem Integranden $f(\vec{r}) = 1$ berechnen. Berechnen Sie das Volumen einer sich im Koordinatenursprung befindlichen Kugel vom Radius R in kartesischen Koordinaten.

Hinweis: $\int dx \sqrt{1-x^2} = \frac{1}{2} \left[x\sqrt{1-x^2} + \arcsin(x) \right]$

P15. Gauß'scher Satz

Berechnen Sie für das Vektorfeld $\vec{A}(\vec{r}) = (x, x, z)$ explizit das Oberflächenintegral

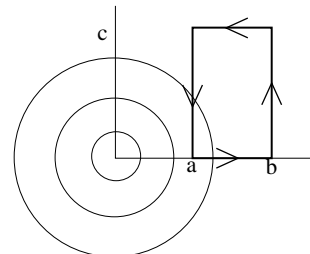
$$\iint_F \vec{A} \cdot d\vec{f} \quad (1)$$

über den Einheitswürfel, dessen eine Ecke mit dem Koordinatenursprung übereinstimmt und seine Kanten achsenparallel liegen. Prüfen Sie das Ergebnis mit dem Gauß'schen Satz.

P16. Stokes'scher Satz

Gegeben sei das Feld $\vec{B}(x, y) = \frac{1}{r^2}(y, -x, 0)$
(r sei der Betrag des Ortsvektors auf der xy -Ebene).
Berechnen Sie explizit das geschlossene Kurvenintegral

$$\oint_C \vec{B} \cdot d\vec{r} \quad (2)$$



über die in der Skizze angegebene Kurve. Prüfen Sie anschließend das Ergebnis mit dem Stokes'schen Satz.

Hinweise: $\int dx \frac{1}{1+x^2} = \arctan(x)$, $\arctan(x) + \arctan(x^{-1}) = \frac{\pi}{2}$.

Bitte Wenden!

Hausaufgaben für den 26.11.2007

H11. (4 Punkte) Gegeben sei das Vektorfeld $\vec{A}(\vec{r}) = (-xz, yz, x^2 + y^2)$.

(a) Bestimmen Sie mit Hilfe des Gauß'schen Satzes den Wert des Flächenintegrals

$$\iint_F \vec{A} \cdot d\vec{f} \quad , \quad (3)$$

wobei F die Oberfläche eines von den Ebenen $x = 0$, $y = 0$, $z = 0$ und $x + y + z = 1$ eingeschlossenen Volumens ist.

Hinweis: Berechnen Sie zunächst die Divergenz des Vektorfeldes!

(b) Welchen Wert besitzt dieses Integral, falls F nur von der Begrenzungsfläche $x + y + z = 1$ gebildet wird?

H12. (4 Punkte) Gegeben sei das Vektorfeld $\vec{B}(\vec{r}) = \vec{a} \times \vec{r}$, wobei \vec{a} vom Ortsvektor unabhängig sei. Bestimmen Sie unter Benutzung des Stoke'schen Satzes das Integral

$$\oint_C \vec{B} \cdot d\vec{r} \quad (4)$$

entlang einer geschlossenen Kurve in der xy -Ebene, die eine Fläche mit Inhalt 1 einschließt.

Hinweis: Berechnen Sie unter Beachtung der richtigen Orientierung zunächst die Rotation des Vektorfeldes!